Chapitre IV

Système de N points matériels en interaction
Application: Problème d'un système à deux corps

V-1 Définitions:

- Un système de N points matériels est discontinue lorsque la distance entre les points qui le constitue est finie.

- Un système de points matériels est dit continue lorsque la distance entre ses points peut être infiniment petite. Les solides constituent un système de points matériels continue.

- Un solide est dit indéformable au cours d'un mouvement produit par une force extérieure lorsque la distance entre deux points quelconques de celui-ci reste inchangé.

- Degré de liberté.

On appelle degré de liberté d'un solide, le nombre minimal de coordonnées indépendantes qui permette de déterminer la position de ce système au cours de son mouvement.

V-2 Elements cinétiques d'un système de N points matériels

2-1 : Schématisation du système:

Considérons un système S de N points matériels, en mouvement par rapport à un référentiel R sous l'action de leurs forces d'interaction et des forces qu'exerce le milieu extérieur sur lui. Le nombre d'inconnues dont dépend a priori le système est $3N$ puisque chaque point a 3 degrés de liberté.

On caractérise à chaque instant l'état mécanique S par l'ensemble de N vecteurs positions $\vec{r_i}$ et N vecteurs vitesses $\vec{V_i}$, par consequent $6N$ variables doivent être données pour connaître l'état de S. En fait, on préfère caractériser cet état par l'ensemble des N vecteurs positions $\vec{r_i}$ et N vecteurs quantités de mouvement $\vec{P_i}$.

2-2 Centre de masse et quantité de mouvement

a) centre de masse:

Considérons un système de N points matériels $A_1, A_2 ...., A_N$ de masse respective $m_1, ... m_N$ et un repère fixe $R(O,x,y,z)$ qu'on suppose Galiléen.

On appelle centre de masse G de système, le point donné par la relation suivante:

$$M\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i} \qquad \vec{r_i} = \overrightarrow{OA_i}$$

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

b) Quantité de mouvement:

La quantité de mouvement totale d'un système de N points matériels est la somme des quantités de mouvement des points qui le constitue,

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V_i}$$

$$\vec{V_i} = \frac{d\overrightarrow{OA_i}}{dt}\Big|_R$$

$\vec{P}$ s'écrit aussi, en permutant les opérateurs sommation et dérivation.

$$\vec{P} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \overrightarrow{OA_i}\right)$$

Introduisons le centre de masse G, c'est à dire le barycentre des points matériels A_i affectés des masses m_i .

Comme on a $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA_i}$ avec $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ désigne masse totale de S ,

il vient:

$$\vec{P} = M\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\Big|_R = M\vec{V}(G/R)$$

c) Référentiel du centre de masse:

On appelle référentiel du centre de masse R_G, associé à R, le référentiel en translation par rapport à R, et tel que $\vec{P}(G/R_G) = \vec{0} = M\vec{V}(G/R_G)$.

Par conséquent, le centre de masse est fixe dans R_G .

2-3 Moment cinétique:

a) Définition et propriétés

Le moment cinétique d'un système de N points matériels en un point O , par rapport au référentiel R est la somme des moments cinétiques en O , de chaque point matériel.

$$\vec{L}(O,S/R)=\sum_i \overrightarrow{OA_i}\wedge m_i\vec{V}(A_i/R)$$

Si O' désigne un autre point, on a:

$$\begin{aligned}\vec{L}(O'S|_R) &= \sum_i \overrightarrow{O'A_i}\wedge m_i\vec{V}(A_i|_R)\\ &= \sum_i(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OA_i})\wedge m_i\vec{V}(A_i|_R)\\ &= \vec{L}(O,S|_R)+\overrightarrow{O'O}\wedge\vec{P}\end{aligned}$$

Il en résulte que dans R_G Où

$$\begin{aligned}\vec{P}_G &= \vec{P}(G|R_G)\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

donc $\vec{L}(O',S/R_G)=\vec{L}(O,S/R_G)$

b) Théorème de Koenig relatif au moment cinétique.

Ce théorème permet de relier le moment cinétique $\vec{L}(O,S/R_G)$ relatifs au moment cinétique $\vec{L}(G,S/R_G)$.

$$\vec{L}(O,S/R)=\vec{L}(G,S/R_G)+\overrightarrow{OG}\wedge M\vec{V}(G/R)$$

$$\boxed{\vec{L}(G,S/R)=\vec{L}(G,S|R_G)}$$

Le moment cinétique par rapport à R_G donc égal au moment cinétique en G par rapport à R

2-4 Energie cinetique du système:

a) Définition

l'énergie cinétique d'un système est la somme des énergies cinétiques des points matériels qui le constituent.

$$E_c(S/R)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_iV^2(A_i/R)$$

b) Théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique

Ce théorème relie l'énergie cinétique d'un système matériel S, par rapport à un référentiel quelconque R, à l'énergie cinétique de ce même système par rapport au référentiel du centre de masse R_G associé à R,.

comme $\vec{V}(A_i/R)=\vec{V}(A_i/R_G)+\vec{V}(G/R)$ d'après la composition des vitesses entre R, et R_G , il vient

$$E_C=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\vec{V}(A_i/R_G)+\vec{V}(G/R)\right)^2$$

puisque $\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{V}(A_i/R_G)=\vec{o}$

$$E_C(S/R)=\frac{1}{2}MV^2(G/R)+E_C(S/R_G)$$

Donc l'énergie cinétique d'un système matériel dans R, est la somme de l'énergie cinétique de son centre affecté de la masse totale et de son énergie cinetique dans R_G.

V-3 lois de la mécanique des systèmes de N points matériels:

3-1: Forces extérieures et forces intérieures à un système.

Considérons un système S et N points matériels en mouvement par rapport à un référentiel R Galiléen. L'un de ses points A_i est soumis à la force $\vec{F_i}$ excercée par l'ensemble des autres points S et par des corps extérieurs à S.

Si le referentiel considéré n'est pas Galiléen, on doit ajouter les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis .

La force $\vec{F_i}$ qui agit sur le point matériel A_i est la somme de deux contributions:

(1) l'une $\vec{F}_{ex\to i}$ due à tout corps étranger à S c'est une force extérieure.

(2) l'autre $\sum_j \vec{F}_{j\to i}$ due à tout corps S différents de A_i , cette contribution est une force interieure.

3-2: Thèorème de la quantité de mouvement

Appliquons par rapport à un référentiel Galiléen, la loi fondamentale de la dynamique à chaque point matériel A_i.

$$\left.\frac{d\vec{P_i}}{dt}\right|_R = \vec{F}_{ext\to i} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$$

$$\sum_i \left.\frac{d\vec{P_i}}{dt}\right|_R = \sum_i \vec{F}_{ex\to i} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$$

soit
$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_R = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{in}$$

en posant $\vec{P} = \sum_i \vec{P_i}$ = quantité de mouvement totale de S .

$$\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_{ext\to i} \qquad et \qquad \vec{F}_{int} = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$$

Somme des forces extérieures sommes des forces intérieures

a) Conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé.

Pour un système isolé, l'équation précédente se réduit à $\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_R = \vec{F}_{int}$ .Or la conservation de la quantité de mouvement, par rapport à un référentiel Galiléen d'un système isolé est en fait expérimentale, il en résulte que:

$$\vec{F}_{int} = \vec{0}$$

cette annulation de la somme des forces intérieures est associée à l'opposition des actions réciproques entre deux points matériels $\vec{F}_{i\to j} + \vec{F}_{j\to i} = 0$
Ce résultat constitue la troisième loi de Newton.

b) Enoncé du théorème de la quantité de mouvement.

Si on tient compte de cette annulation de la somme des forces intérieures, la quantité de mouvement d'un système matériel , soumis à la force extérieure, satisfait au théorème suivant appelé théorème de la quantité de mouvement.

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_R = \vec{F}_{ext}$$

Soulignons bien que ce théorème est relatif à un référentiel Galiléen.

Si ce n'est pas le cas, il faut ajouter pour chaque point matériel les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

3-3 **Théorème du moment cinétique:**

Appliquons par rapport à un référentiel Galiléen R, le théorème du moment cinétique à chaque point matériel A_i, il vient:

$$\left.\frac{d\vec{L}(O, A_i|_R)}{dt}\right|_R = \vec{OA_i} \wedge \vec{F}_{ext\to i} + \vec{OA_i} \wedge \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$$

En sommant sur tous les points i, il vient

$$\sum_i \left.\frac{d\vec{L}(O, A_i|_R)}{dt}\right|_R = \sum \vec{OA_i} \wedge \vec{F}_{ext\to i} + \sum_i \left(\vec{OA_i} \wedge \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i} \right)$$

$$\left.\frac{d\vec{L}(O, S|_R)}{dt}\right|_R = \vec{M}(O, F_{ext}) + \vec{M}(O, F_{int})$$

$$\vec{L}(O,S|_R)=\sum_i \vec{L}(O,A_i|_R)$$
$$\vec{M}(O,F_{ext})=\sum \vec{OA_i}\wedge \vec{F}_{ext\to i}$$
$$\vec{M}(O,F_{int})=\sum_i\left(\vec{OA_i}\wedge\sum_{j\neq i}\vec{F}_{j\to i}\right)$$

désignent respectivement le moment cinétique total du système, la somme des moments des forces extérieures et la somme des moments des forces intérieures.

a) Conservation du moment cinétique pour un système isolé.

Pour un système isolé, l'equation précédente se reduit à $\left.\frac{d\vec{L}(O,S|_R)}{dt}\right|_R=\vec{M}(O,F_{int})$

Or ici aussi, la conservation du moment cinétique d'un système isolé par rapport à un référentiel Galiléen, est en fait experimental. Il en résulte.

$$\vec{M}(O,\vec{F}_{int})=\vec{0}$$

Cette annulation de la somme des moments des forces intérieures doit être associée à la troisième loi de Newton.

b) Enoncé du théorème du mouvement cinétique.

si l'on tient de cette dernière propriété des forces intérieures, le moment cinétique d'un système matériel soumis à des forces extérieures satisfait au théorème suivant appelé théorème du moment cinétique

$$\vec{M}(O,F_{ext})=\left.\frac{d\vec{L}}{dt}(O,S|_R)\right|_R$$

R: repère galiléen

3-4 Théorème de l'énergie cinétique.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à chaque point materiel A_i

$$\frac{dE_{c,i}}{dt}=P_{ext\to i}+\sum_{j\neq i}P_{j\to i}$$

En sommant sur tous les points i , on obtient

$$\sum_i\frac{dE_{c,i}}{dt}=\sum_i P_{ext\to i}+\sum_i\sum_{j\neq i}P_{j\to i}$$

a) Enoncé du théorème de l'énergie cinétique.

Introduisons l'énergie cinétique total, la puissance totale des forces extérieures et la puissance totale des forces interieures, respectivement.

$$Ec = \sum_i E_{c,i} \qquad P_{ext} = \sum_i P_{ext\to i} \qquad \text{et}$$
$$P_{in} = \sum_i \sum_{j\neq i} P_{j\to i}$$

il vient
$$\frac{dE_c}{dt} = P_{ext} + P_{in}$$
$$ou \quad dE_c = \delta W_{ext} + \delta W_{int}$$

en désignant par $\delta W_{ext} = P_{ext} dt$ *et* $\delta W_{int} = P_{int} dt$ les travaux élementaires des forces extérieures et intérieures.

Si l'on intégre entre deux dates quelconque, on trouve. $\Delta E_c = W_{ext} + W_{int}$

d'ou l'énoncé: la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures et des forces intérieures.

b) Cas d'un système isolé:

Dans le Cas où le système est isolé, le théorème précédent se réduit à , puisque
$$\delta W_{ext} = 0$$

$$dE_c = \delta W_{int} \text{ ce qui donne } \Delta E_c = W_{int}$$

Notons que, a priori que $\delta W_{int} \neq 0$ alors que $\vec{F}_{int} = \vec{0}$ *et* $\vec{M}(O, \vec{F}_{int}) = 0$

3-5 Energie potentielle, Energie mécanique, théorème de l'énergie mécanique.

a) Energie potentielle

Certaines forces extérieures et intérieures sont telles que leurs travaux ne dépendent pas du chemin suivi par les points d'applications.
Ces travaux élementaires peuvent alors s'écrire sous la forme différentielles de fonctions appelées énergies potentielles.

$$\delta W_{ext} = -dE_{p,ext} \qquad et$$
$$\delta W_{int} = -dE_{p,int}$$

b) Energie mécanique

Par définition, on appelle énérgie mécanique d'un système S la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

$$E_m = E_c + E_p \quad avec \quad E_p = E_{p,ext} + E_{p,\text{int}}$$

c) Théorème de l'énergie mécanique

Distinguons dans les forces qui s'éxercent sur un système celles qui dérivent d'une énergie potentielle des autres. Les travaux élementaires des forces extérieures et intérieures peuvent se mettre sous la forme.

$$\delta W_{ext} = -dE_{p,ext} + \delta W_{ext}^{nc} = -dE_{p,ext} + P_{ext}^{nc} dt$$
$$\delta W_{\text{int}} = -dE_{p,\text{int}} + \delta W_{\text{int}}^{nc} = -dE_{p,\text{int}} + P_{\text{int}}^{nc} dt$$

où δW_{ext}^{nc} ; $\delta W_{\text{int}}^{nc}$ désignent les travaux élementaires des forces qui ne dépendent pas d'une énergie potentielle et P_{ext}^{nc} , P_{int}^{nc} les puissances correspondantes.

$$dE_c = -dE_{p,ext} + \delta W_{ext}^{nc} - dE_{p,\text{int}} + \delta W_{\text{int}}^{nc}$$

soit
$$d\left(E_c + E_{p,ext} + E_{p,\text{int}}\right) = \delta W_{ext}^{nc} + \delta W_{\text{int}}^{nc}$$
$$= P_{ext}^{nc} dt + P_{\text{int}}^{nc} dt$$

$$\boxed{dE_m = \delta W_{ext}^{nc} + \delta W_{\text{int}}^{nc}}$$

soit aussi
$$\frac{dE_m}{dt} = P_{ext}^{nc} + P_{ext}^{nc}$$

En intégrant entre deux dates quelconques, il vient

$$\boxed{\Delta E_m = W_{ext}^{nc} + W_{\text{int}}^{nc}}$$

La variation d'énergie mécanique est donc égale à la somme des travaux des forces extérieures et intérieures qui ne dépendent pas d'une énergie potentielle.

d) Cas d'un système isolé:

l'énergie mécanique d'un système isolé ne se conserve pas en général, puisque l'on a $\Delta E_m = W_{\text{int}}^{nc} \neq 0$

V-4 Problème d'un système à deux corps:

Soit un système formé par deux particules M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 en mouvement dans le référentiel galiléen $R = R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ sous l'effet de leur seule force d'interaction. Le système est donc isolé.

4 -1 Les élèments cinétiques du système:

a) Centre de masse du système:

Le centre de masse G d'un système de deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 est défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$$

b) Quantité de mouvement:

La quantité de mouvement de ce système par rapport à R vaut:

$$\vec{P} = \vec{P}_1/R + \vec{P}_2/R = m_1\vec{V}(M_1/R) + m_2\vec{V}(M_2/R)$$

$$\vec{P} = m_1\left(\frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt}\right)_R + m_2\left(\frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt}\right)_R$$

$$\vec{P} = \frac{d}{dt}(m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2})_R = (m_1 + m_2)\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OG})_R$$

Dans le référentiel du centre de masse d'origine G qui est en translation par rapport à R noté $R^* = R_G = R_G(G,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, la quantité de mouvement s'écrit:

$$\vec{P^*} = \vec{P}_1/R_G + \vec{P}_2/R_G = m_1\vec{V}(M_1/R_G) + m_2\vec{V}(M_2/R_G)$$

$$\vec{P^*} = m_1\left(\frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt}\right)_{R_G} + m_2\left(\frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt}\right)_{R_G}$$

$$\vec{P^*} = \frac{d}{dt}(m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2})_{R_G}$$

$$\vec{P^*} = (m_1 + m_2)\frac{d}{dt}(\overrightarrow{GG})_{R_G} = \vec{0}$$

Il en résulte que dans le repère de centre de masse R_G, les quantités de mouvement de M_1 et M_2 sont opposées. Evaluons les quantités de mouvement des deux corps dans le repère de centre de masse .

$$\vec{P}_1/R_G = m_1\vec{V}(M_1/R_G) = m_1\left(\frac{d\overrightarrow{GM}_1}{dt}\right)_{R_G}$$

$$\vec{P}_1/R_G = m_1\left[\left(\frac{d\overrightarrow{OM}_1}{dt}\right)_{R_G} - \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{R_G}\right]$$

$$\vec{P}_1/R_G = m_1\left[\left(\frac{d\overrightarrow{OM}_1}{dt}\right)_{R} - \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2}{m_1+m_2}\right)_{R_G}\right]$$

$$\vec{P}_1/R_G = m_1\left[\vec{V}(M_1/R) - \frac{m_1\vec{V}(M_1/R) + m_2\vec{V}(M_2/R)}{m_1+m_2}\right]$$

$$\vec{P}_1/R_G = m_1\left[\vec{V}(M_1/R) - \frac{m_1\vec{V}(M_1/R) + m_2\vec{V}(M_2/R)}{m_1+m_2}\right]$$

$$\vec{P}_1/R_G = -\vec{P}_1/R_G = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[\vec{V}(M_1/R) - \vec{V}(M_2/R)\right]$$

Notons $\overrightarrow{OM}_1 = \vec{r}_1$, $\overrightarrow{OM}_2 = \vec{r}_2$ et $\vec{r} = \overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{OM}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, il vient en introduisant $\vec{V} = \left[\vec{V}(M_1/R) - \vec{V}(M_2/R)\right]$ et

$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ = masse réduite

Ainsi dans le référentiel R_G, la quantité de chacune des particules est égale à celle d'une particule fictive M , de masse μ.La particule M est défini par $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_2M_1}$

c) Moment cinétique:

i) Définition: Le moment cinétique $\vec{L}(O/R)$ en un point O ,d'un système de deux deus points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 en mouvement dans le référentiel galiléen $R = R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, s'écrit:

$$\vec{L}(O/R) = \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1\vec{V}(M_1/R) + \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2\vec{V}(M_2/R)$$

ii) Théorème de Koenig relatif au moment cinétique:

Ce théorème permet de relier le moment cinétique $\vec{L}(O/R)$ au moment cinétique $\vec{L}(G/R_G)$ avec:

$$\vec{L}(G/R_G) = \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\vec{V}(M_1/R_G) + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\vec{V}(M_2/R_G)$$

En remplaçant dans l'expression $\vec{L}(O/R)$:

$$\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_i} \text{ et } \vec{V}(M_i/R) = \vec{V}(G/R) + \vec{V}(M_i/R_G) \qquad i \in \{1,2\},$$

on trouve:

$$\vec{L}(O/R) = \overrightarrow{OG} \wedge (m_1 + m_2)\vec{V}(G/R) + \vec{L}(G/R_G)$$

iii) Expression du moment cinétique $\vec{L}(G/R_G)$:

En substituant dans l'expression $\vec{L}(G/R_G)$:

$$\vec{P}_2/R_G = m_2\vec{V}(M_2/R_G) = -\vec{P}_1/R_G = -m_1\vec{V}(M_1/R_G) \text{ et } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

on trouve:

$$\vec{L}(G/R_G) = (\overrightarrow{GM_1} - \overrightarrow{GM_2}) \wedge \mu\vec{V} = \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \mu\vec{V}$$

En posant $\overrightarrow{GM} = \vec{r} = \overrightarrow{M_2M_1}$, il vient $\vec{L}(G/R_G) = \vec{r} \wedge \mu\vec{V}$

On conclut que le moment cinétique d'un système de deux points matériels en mouvement par rapport au repère barycentrique d'origine G est égal à celui d'une particule fictive M , de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, de vitesse $\vec{V}$ Sa position est repérée par $\vec{r} = \overrightarrow{GM}$.

d) Energie cinétique:

i) Définition:

L'énergie cinétique d'un système de deux deus points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 en mouvement dans le référentiel galiléen $R = R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$,vaut

$$\varepsilon_{c/R} = \frac{1}{2} m_1 V^2(M_1/R) + \frac{1}{2} m_2 V^2(M_2/R)$$

ii) Théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique:

En substituant dans l'expression de $\varepsilon_{c/R}$,

$\vec{V}(M_i/R) = \vec{V}(G/R) + \vec{V}(M_i/R_G)$ $\;i \in \{1,2\}$ et en tenant compte que

$m_1\vec{V}(M_1/R_G) + m_2\vec{V}(M_2/R_G) = \vec{O}$, on trouve la relation ci-après traduisant l'énoncé du théorème de Koenig.

$$\varepsilon_{c/R} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2(G/R) + \varepsilon_{c/R_G}$$

avec $$\varepsilon_{c/R_G} = \frac{1}{2} m_1 V^2(M_1/R_G) + \frac{1}{2} m_2 V^2(M_2/R_G)$$

4-2) Lois de conservation pour un système isolé de deux particules:

Pour un système isolé , la quantité de mouvement et le moment cinétique sont des constantes :

$$\vec{P}_1/R + \vec{P}_1/R = m_1\vec{V}(M_1/R) + m_2\vec{V}(M_2/R) = \overrightarrow{Cte},$$

$$\vec{L}(O/R) = \overrightarrow{Cte} \quad \text{et} \quad \vec{L}(G/R_G) = \overrightarrow{Cte}$$

Si on suppose que les forces d'interactions dérivent d'une énergie potentielle, alors l'énergie ménique est une constante

$$\varepsilon_{mécanique} = Cte.$$

4-3) Equations du mouvement d'un système isolé de deux points matériels:

a) Equations de mouvement dans R_G:

Soit $F_{2\to1}$ la force exercée par la particule M_2 sur la particule M_1. En appliquant la loi fondamentale de la dynamique à la particule M_1 uniquement:

$$m_1 \left.\frac{d\left(\vec{V}(M_1/R_G)\right)}{dt}\right|_{R_G} = \vec{F}_{2\to1} \qquad \text{soit} \qquad \mu \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{R_G} = \vec{F}_{2\to1}$$

Donc , tout se passe comme si la particule fictive M , de masse μ était soumise à une force centrale puisque portée par r. En outre, les mouvements de M_1 et M_2 dans R_G se déduisent du mouvement de M; en effet:

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = 0$$

$$\frac{\overrightarrow{GM_1}}{m_2} = -\frac{\overrightarrow{GM_2}}{m_1} = \frac{\overrightarrow{GM_1} - \overrightarrow{GM_2}}{m_1 + m_2} = \frac{\overrightarrow{M_2M_1}}{m_1 + m_2} = \frac{\overrightarrow{GM}}{m_1 + m_2}$$

$$\overrightarrow{GM_1} = \frac{m_2 GM}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GM_2} = -\frac{m_1 GM}{m_1 + m_2}$$

Remarque: Si l'une des particules a une masse beaucoup plus faible que l'autre , elle peut être assimilée à la particule fictive M, la position de la seconde coincidant avec le centre de masse G.